Université Hassan 1er
Faculté des Sciences et Techniques
Settat

Concours d'accès en première année du cycle ingénieur - Session Juillet 2015	
Épreuve de : MATHEMATIQUES	Durée : 3 Heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 01 : (6 points)

Soit $B=\left(\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\right)$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ c'est-à-dire : $\vec{i}=(1,0,0)$; $\vec{j}=(0,1,0)$ et $\vec{k}=(0,0,1)$, et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base B est :

$$mat_B\, f = A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

1/a/ Calculer $P_A(x)$ le polynôme caractéristique de la matrice A.

b/ Vérifier que l'ensemble des valeurs propres de la matrice A est : $\{0;1;2\}$.

2/ Considérons les vecteurs : $\overline{u_1}=(1,-2,4)$; $\overline{u_2}=(1,-2,5)$; $\overline{u_3}=(3,-4,12)$

a/ Montrer que $B'=\left(\overline{u_1}\,,\overline{u_2}\,,\overline{u_3}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

b/ Montrer que la matrice de f relativement à la base B' est : $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(c'est-à-dire : $B'=\left(\overline{u_1}\,,\overline{u_2}\,,\overline{u_3}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f) .

3/ On considère le système (S) d'équations différentielles suivant : $\begin{cases} x'(t)=2x(t)+3y(t)+z(t) \\ y'(t)=-4y(t)-2z(t) \\ z'(t)=4x(t)+12y(t)+5z(t) \end{cases}$

a/ Écrire (S) sous une forme matricielle .

b/ Résoudre le système (S) .

c/ Déterminer la solution de (S) qui vérifie la condition initiale : $\begin{cases} x(0)=-1 \\ y(0)=1 \\ z(0)=0 \end{cases}$

ENJOY STUDYING

ENJOY STUDYING

Concours d'accès en première année du cycle ingénieur - Session Juillet 2015	
Epreuve de : MATHEMATIQUES	Durée : 3 Heures

Exercice 02: (5 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y''-y'-6y=-5e^{-2x}$; où y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1/ Résoudre l'équation homogène (H) : $y''-y'-6y=0$.

2/ Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=xe^{-2x}$ est une solution particulière de (E).

3/ Déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

4/ Déterminer la fonction y solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions : $y(0)=1$ et $y'(0)=-1$

5/ Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x+1)e^{-2x}$ et soit (C_f) sa courbe représentative.

a/ Déterminer le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 0.

b/En déduire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0, et préciser la position relative de (C_f) par rapport à (T) au voisinage de ce point.

Exercice 03 : (9 points)

Notations et rappels

Soit f une fonction T - périodique $(T>0)$ et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

- Les coefficients de Fourier de la fonction f sont définis par :

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^* : \begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos(\omega nt)\,dt \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin(\omega nt)\,dt \end{cases}$$

Où $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ est la pulsation de f

- La série de Fourier de f est la série trigonométrique : $a_0+\sum_{n\geq 1} a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)$

- Si la série de Fourier de f converge pour tout $x\in\mathbb{R}$, et si sa somme est la fonction f, alors on dit que f est développable en série de Fourier.

- On rappelle le théorème de DIRICHLET :

  Soit f une fonction T - périodique $(T>0)$ et définie sur $\mathbb{R}$.

  On **suppose** que **la fonction** f **vérifie** les conditions suivantes appelées **conditions de Dirichlet** :

  ✓ Les discontinuités de f sont en nombre fini sur tout intervalle de longueur T

Concours d'accès en première année du cycle ingénieur - Session Juillet 2015	
Épreuve de : MATHEMATIQUES	Durée : 3 Heures

- ✓ $(\forall x \in \mathbb{R})$; f admet une limite à gauche en x $\left(notée\ f(x^-)\right)$ et une limite à droite en x $\left(notée\ f(x^+)\right)$
- ✓ $(\forall x \in \mathbb{R})$; f admet une dérivée à gauche en x et une dérivée à droite en x

Alors : la série de Fourier de f converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$$

- On rappelle la formule de PARSEVAL :

  Soit f une fonction T - périodique $(T > 0)$, définie sur $\mathbb{R}$ et satisfaisant les conditions de Dirichlet. Alors : $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$

Partie 1 : Résultats préliminaires

Soit f une fonction T - périodique $(T > 0)$ et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$

✓ 1/ Montrer que : $\int_0^T f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$

✓ 2/ Montrer que si la fonction f est paire alors :

i. $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt$

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(\omega n t)dt$ et $b_n = 0$

✓ 3/ Montrer que si la fonction f est impaire alors :

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 0$

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(\omega n t)dt$

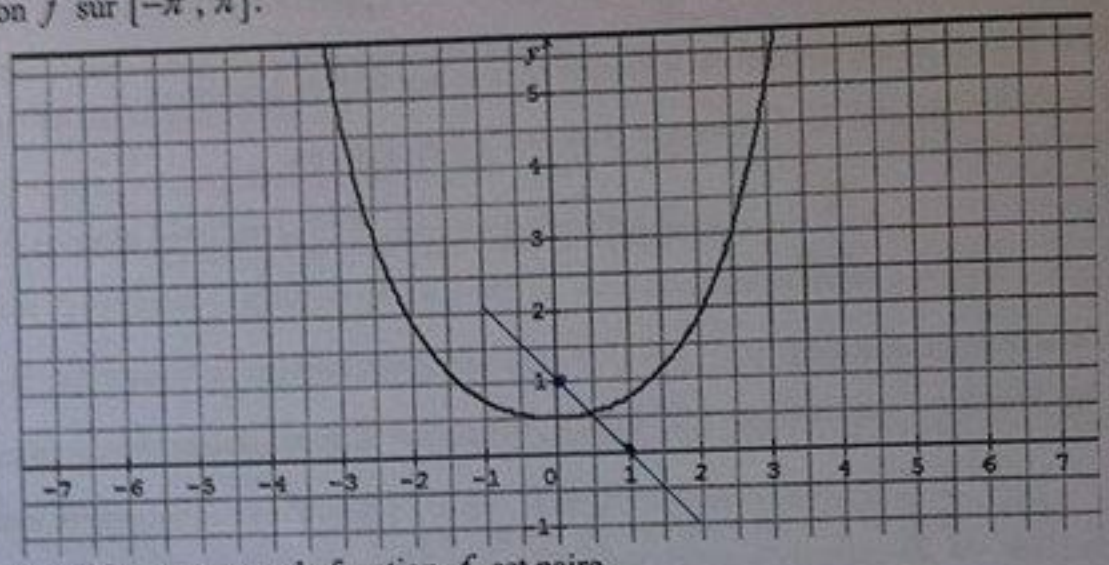
Partie 2

On considère le signal défini par la fonction périodique f de période 2π telle que pour tout $t \in [-\pi, \pi]$: $f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{4}$.

ENJOY STUDYING

Concours d'accès en première année du cycle ingénieur - Session Juillet 2015	
Épreuve de : MATHEMATIQUES	Durée : 3 Heures

1/ La courbe ci-dessous est la représentation graphique, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction f sur $[-\pi, \pi]$.



a/ Justifier graphiquement que la fonction f est paire.

b/ A partir de la représentation graphique de la fonction f sur $[-\pi, \pi]$, donner le tableau de variation de la fonction f sur $[-\pi, \pi]$.

c/ Tracer la courbe représentative de la fonction f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

2/a/ Donner la valeur de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b/ Vérifier que : $a_0 = \dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{4\pi}$

c/ En faisant une intégration par partie deux fois, vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \times \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

3/ Vérifier que f satisfait aux conditions de Dirichlet sur $\mathbb{R}$ et écrire le développement en série de Fourier de la fonction f.

4/a/ Justifier la convergence des séries numériques de terme général : $\dfrac{1}{n^2+1}$ et $\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$

b/ En utilisant le développement en série de Fourier de la fonction f pour $t = 0$ et $t = \pi$

calculer les sommes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

5/a/ Justifier la convergence de la série numérique de terme général : $\dfrac{1}{(n^2+1)^2}$

b/ En utilisant le théorème de Parseval calculer la somme : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+1)^2}$.

Fin de l'épreuve